УДК 517.977

Э. Г. Альбрехт

ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ В ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМАХ*

1. Постановка задачи

Пусть динамика управляемого процесса описывается системой линейных уравнений

$$\dot{x} = A(t, \lambda)x + b(t, \lambda)u, \tag{1.1}$$

где x — n-мерный вектор фазовых координат; u — скалярная функция, описывающая управляющее воздействие; λ — малый параметр.

Для полноты изложения приведем известную [1]–[3] формулировку задачи предельного быстродействия.

Задача 1. *Среди кусочно-непрерывных управлений $u(t, \lambda)$, удовлетворяющих ограничению*

$$|u(t, \lambda)| \le \mu, \quad 0 < \mu = const, \tag{1.2}$$

и переводящих систему (1.1) *из заданного начального состояния $x(t_0) = x^{(0)}$ в заданное конечное состояние $x(t_1) = x^{(1)}$ за конечное время $T = t_1 - t_0$, требуется найти такое управление $u^0(t, \lambda) = u^0(t, \lambda; t_0, x^{(0)})$, $t \in Q^0(\lambda) = [t_0, t_1^0(\lambda)]$, для которого время $T^0(\lambda) = t_1^0(\lambda) - t_0$ управления системой* (1.1) *будет минимально возможным.*

Укажем условия, при которых будет изучаться задача 1.

Условие 1.1. *Матрица $A(t, \lambda)$ и вектор $b(t, \lambda)$ являются аналитическими функциями времени при $t \ge t_0 \ge 0$ и параметра λ в некоторой достаточно малой окрестности точки $\lambda = 0$.*

Условие 1.2. *Система* (1.1) *неособенна* [2] *по воздействию u, т.е. при $\lambda = 0$ ранг матрицы $\{\ell_1(t, 0), \ldots, \ell_n(t, 0)\}$ равен n при всех $t \ge 0$. Здесь*

$$\ell_1(t, \lambda) = b(t, \lambda), \quad \ell_k(t, \lambda) = A(t, \lambda)\ell_{k-1}(t, \lambda) - \frac{d\ell_{k-1}(t, \lambda)}{dt} \quad (k = 2, \ldots, n).$$

---

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по гранту 97-01-00371.

Обозначим через $X[t_1,t,\lambda]$ (где $X[t,t,\lambda]=E$ — единичная матрица) фундаментальную матрицу решений однородной системы $\dot{x}=A(t,\lambda)x$ и введем в рассмотрение n-мерную вектор-функцию

$$h(t_1,t,\lambda)=X[t_1,t,\lambda]b(t,\lambda), \quad t_0\le t\le t_1. \tag{1.3}$$

Пусть $\overline{Q}(\lambda)=[\bar{t}_0(\lambda),\bar{t}_1(\lambda)]$ — наибольший отрезок, на котором по крайней мере одна из компонент $h_1(t_1,t,\lambda),\dots,h_n(t_1,t,\lambda)$ вектор-функции $h(t_1,t,\lambda)$ не меняет знак.

Условие 1.3. *При $\lambda=0$ существует единственная компонента вектор-функции $h(t_1,t,\lambda)$, которая положительна (или отрицательна) на ограниченном отрезке $\overline{Q}(0)=[\bar{t}_0(0),\bar{t}_1(0)]$ и обращается в нуль в точках $\bar{t}_0(0)$ и $\bar{t}_1(0)$, т.е. есть единственный индекс j_0 такой, что $h_{j_0}(\bar{t}_1(0),t,0)>0$ (или <0) при $t\in(\bar{t}_0(0),\bar{t}_1(0))$, $\bar{t}_0(0)\le t_0<t_1\le\bar{t}_1(0)$, $h_{j_0}(\bar{t}_1(0),\bar{t}_0(0),0)=0$, $h_{j_0}(\bar{t}_1(0),\bar{t}_1(0),0)=0$ и величина $\bar{t}_1(0)<\infty$. Кроме того, при $t=\bar{t}_1(0)$ отлична от нуля производная $\dot{h}_{j_0}(\bar{t}_1(0),t,0)$.*

Известно [1]–[3], что при определенных условиях оптимальное управление $u^0(t,\lambda)$, разрешающее задачу 1 для системы (1.1), существует, единственно с точностью до значений на множестве меры нуль и является релейной знакопеременной функцией, принимающей два значения: μ и $-\mu$. Смена знака происходит при пересечении оптимальными движениями неинвариантной части поверхности переключений и при их попадании на её инвариантную часть, по которой идут оптимальные движения в заданную конечную точку $x^{(1)}$ на заключительном этапе.

Целью настоящей работы является описание поверхности переключений, определяющей синтез [1]–[3] оптимальных управлений для задачи предельного быстродействия в пространстве переменных $\{t,x\}$, и представление ее уравнения в явном параметрическом виде в зависимости от фундаментальной матрицы решений $X[t_1,t,\lambda]$. Указываются достаточные условия, при которых поверхность переключений является аналитической функцией малого параметра λ. Статья продолжает исследования [4],[5].

2. Построение инвариантной части поверхности переключений

При выполнении условия 1.2 система (1.1) может быть переведена из произвольного начального положения $x(t)=x$, $\bar{t}_0(\lambda)\le t_0\le t<\bar{t}_1(\lambda)$ в произвольное конечное положение $x(t+\xi)=y$ за некоторое конечное время ξ при помощи постоянного по величине управляющего воздействия $u = \mu$ (либо $u = -\mu$) тогда и только тогда, когда имеет место векторное равенство [2, с.95]:

$$c(t, \xi, x, y, \lambda) = y - X[t + \xi, t, \lambda]x = \pm\mu \int_t^{t+\xi} h(t + \xi, \tau, \lambda)d\tau. \tag{2.1}$$

Здесь и везде в дальнейшем верхний знак в $\pm$ соответствует значению $u = \mu$, а нижний — значению $u = -\mu$.

Учитывая здесь, что $t_1 = t+\xi$, из (1.3) и (2.1) находим множество точек x, из которых можно перевести систему (1.1) в положение $x(t + \xi) = y$ за время ξ:

$$x = X[t, t + \xi, \lambda]y \mp \mu \int_t^{t+\xi} h(t, \tau, \lambda)d\tau. \tag{2.2}$$

Поскольку управление $u = \mu$ (либо $u = -\mu$) является оптимальным, то величина $\xi \leq \bar{t}_1(\lambda) - \bar{t}_0(\lambda)$ равна времени быстродействия. Следовательно, векторное равенство (2.2) в параметрической форме определяет поверхность в пространстве $\{t, x\}$, по которой оптимальные траектории идут в точку y, причём параметром является время быстродействия. Исключив, если это возможно, из (2.2) параметр ξ, получим уравнение инвариантной части поверхности переключений при приведении системы (1.1) в положение y. Отметим, что при условиях 1.1–1.3 все величины, входящие в (2.2), являются аналитическими функциями параметра λ в некоторой достаточно малой окрестности точки $\lambda = 0$, поэтому все необходимые вычисления можно вести, разлагая их в ряды по степеням этого параметра, с любой заранее заданной точностью.

Из приведенных выше рассуждений и результатов работ [4],[5] вытекают следующие утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.3. *Тогда множество точек* $\{t, x\}$, *удовлетворяющих при* $\xi \in [\bar{t}_0(\lambda), \bar{t}_1(\lambda)]$ *уравнению* (2.2) *и одному из неравенств*

$$c_{j_0}(t, \xi, x, y, \lambda) \geq 0 \qquad \text{при} \qquad h_{j_0}(t + \xi, \tau, \lambda) \geq 0 \tag{2.3}$$

или

$$c_{j_0}(t, \xi, x, y, \lambda) \leq 0 \qquad \text{при} \qquad h_{j_0}(t + \xi, \tau, \lambda) \leq 0, \tag{2.4}$$

составляет ту замкнутую и ограниченную часть $S_+^{(0)}(t, x, y, \lambda)$ *инвариантного множества поверхности переключений* $S^0(t, x, y, \lambda)$, *где управляющее воздействие положительно. Уравнение поверхности* $S_+^{(0)}(t, x, y, \lambda)$

является аналитической функцией параметра λ в некоторой достаточно малой окрестности точки $\lambda = 0$.

При изменении времени начала движения t от $\bar{t}_0(\lambda)$ до $\bar{t}_1(\lambda)$ и времени быстродействия ξ от 0 до $\bar{T}^0(\lambda) = \bar{t}_1(\lambda) - \bar{t}_0(\lambda)$ при условии $\bar{t}_0(\lambda) \leq t + \xi \leq \bar{t}_1(\lambda)$ точка начала движения x, задаваемая неравенством (2.3) [или неравенством (2.4)] и уравнениями (2.2), пробежит все множество $S_+^{(0)}$. Таким образом, уравнения (2.2) и неравенство (2.3) [или (2.4)] в параметрической форме описывают ту часть $S_+^{(0)}(t, x, y, \lambda)$ инвариантного множества поверхности переключений $S^0(t, x, y, \lambda)$, где $u = \mu$, причём в качестве параметра используется время быстродействия ξ.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.3. *Тогда множество точек $\{t, x\}$, удовлетворяющих при $\xi \in [\bar{t}_0(\lambda), \bar{t}_1(\lambda)]$ уравнению* (2.2) *и одному из неравенств*

$$c_{j_0}(t, \xi, x, y, \lambda) \leq 0 \qquad \text{при} \qquad h_{j_0}(t + \xi, \tau, \lambda) \geq 0 \tag{2.5}$$

или

$$c_{j_0}(t, \xi, x, y, \lambda) \geq 0 \qquad \text{при} \qquad h_{j_0}(t + \xi, \tau, \lambda) \leq 0, \tag{2.6}$$

составляет ту замкнутую и ограниченную часть $S_-^{(0)}(t, x, y, \lambda)$ инвариантного множества поверхности переключений $S^0(t, x, y, \lambda)$, где управляющее воздействие отрицательно. Уравнение поверхности $S_-^{(0)}(t, x, y, \lambda)$ является аналитической функцией параметра λ в некоторой достаточно малой окрестности точки $\lambda = 0$.

При изменении времени начала движения t от $\bar{t}_0(\lambda)$ до $\bar{t}_1(\lambda)$ и времени быстродействия ξ от 0 до $\bar{T}^0(\lambda) = \bar{t}_1(\lambda) - \bar{t}_0(\lambda)$ при условии $\bar{t}_0(\lambda) \leq t + \xi \leq \bar{t}_1(\lambda)$ точка начала движения x, задаваемая неравенством (2.5) [или неравенством (2.6)] и уравнениями (2.2), пробежит все множество $S_-^{(0)}$. Таким образом, уравнения (2.2) и неравенство (2.5) [или (2.6)] в параметрической форме описывают ту часть $S_-^{(0)}(t, x, y, \lambda)$ инвариантного множества поверхности переключений $S^0(t, x, y, \lambda)$, где $u = -\mu$, причём в качестве параметра используется время быстродействия ξ.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.3. *Время управления ξ системой* (1.1) *из произвольной начальной позиции $\{t, x\} \in S_+^{(0)}(t, x, y, \lambda)$ [или $\{t, x\} \in S_-^{(0)}(t, x, y, \lambda)$] будет минимально возможным тогда и только тогда, когда оно будет наименьшим положительным корнем $\xi =$*

$T^0(t,x,y,\lambda) \le \bar{t}_1(\lambda) - \bar{t}_0(\lambda)$ *уравнения*

$$|c_{j_0}(t,\xi,x,y,\lambda)| - \mu \int_t^{t+\xi} |h_{j_0}(t+\xi,\tau,\lambda)| d\tau = 0. \tag{2.7}$$

Величина $\bar{t}_1(\lambda)$ *является аналитической функцией параметра* λ *в некоторой достаточно малой окрестности точки* $\lambda = 0$.

Отметим, что время быстродействия $T^0(t,x,y,\lambda)$, вообще говоря, не является аналитической функцией параметра λ.

3. Построение поверхности переключений

Сначала для системы (1.1), пользуясь теоремами 2.1 и 2.2, построим инвариантную часть $S^0(t,x,\lambda)$ поверхности переключений, соответствующую заданной конечной точке $x^{(1)}$. Для этого в параметрическом уравнении (2.2) инвариантной части поверхности переключений следует положить $y = x^{(1)}$ и найти поверхности $S_+^{(0)}(t,x,\lambda)$ и $S_-^{(0)}(t,x,\lambda)$.

Перейдем к построению неинвариантной части поверхности переключений. Неинвариантная часть поверхности переключений склеивается [5] из двух последовательностей своих участков, каждый из которых можно описать параметрически. Одна из последовательностей неинвариантных участков определяет смену знака управления для оптимальных траекторий, заключительный этап которых проходит при $u^0 = \mu$ по поверхности $S_+^{(0)}(t,x,\lambda)$, а другая — для оптимальных траекторий, заключительный этап которых идет при $u = -\mu$ по поверхности $S_-^{(0)}(t,x,\lambda)$.

Построим первую последовательность неинвариантных участков поверхности переключений, которая определит смену знака управления для тех оптимальных движений, заключительный этап которых проходит при $u^0 = \mu$ по инвариантной части поверхности переключений $S_+^{(0)}$. Для этого в уравнении (2.1) положим $t + \xi = \bar{t}_1(\lambda)$ и найдём связь между начальными позициями $\{t, x\}$ и конечными $\{\bar{t}_1(\lambda), y\}$, в которые можно попасть без переключений за наибольшее по величине минимально возможное время $\bar{t}_1(\lambda) - t$:

$$y = X[\bar{t}_1(\lambda), t, \lambda]x \pm \mu \int_t^{\bar{t}_1(\lambda)} h(\bar{t}_1(\lambda), \tau, \lambda) d\tau. \tag{3.1}$$

Зависимость $y = y_-(t,x,\lambda)$ из равенства (3.1), отвечающую управлению $u^0 = -\mu$, подставим в уравнение инвариантной части поверхности переключений $S_+^{(0)}$, взяв её точки за конечные. Получим параметрическое уравнение геометрического места точек $S_+^{(1)}(t,x,\lambda)$, из которых без переключений при управлении $u^0 = -\mu$ можно попасть на поверхность $S_+^{(0)}(t,x,\lambda)$. Если инвариантная часть $S_+^{(0)}$ получена в явном виде, то и первый участок $S_+^{(1)}(t,x,\lambda)$, а также и все последующие участки неинвариантной части поверхности переключений найдутся в явном аналитическом виде. Чтобы получить следующий неинвариантный участок поверхности переключений, зависимость $y = y_+(t,x,\lambda)$ из равенства (3.1), отвечающую управлению $u^0 = \mu$, подставим в уравнение неинвариантной части $S_-^{(1)}$, взяв её точки за конечные. Получим параметрические уравнения для точек следующей неинвариантной части $S_+^{(2)}(t,x,\lambda)$ поверхности переключений и т.д.

Построение второй последовательности неинвариантных участков поверхности переключений, которая определяет смену знака управления для оптимальных траекторий, заключительный этап которых идет при $u = -\mu$ по поверхности $S_-^{(0)}(t,x,\lambda)$, проводится аналогично.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.3. *Для того чтобы получить параметрическое уравнение неинвариантных участков* $S_+^{(2j)}(t,x,\lambda)$ [*или* $S_-^{(2j)}(t,x,\lambda)$] *поверхности переключений, следует в качестве конечных взять точки участка* $S_+^{(2j-1)}(t,x,\lambda)$ [*или* $S_-^{(2j-1)}(t,x,\lambda)$] *и подставить вместо* x *в равенство* (2.2) $y_+(t,x,\lambda)$ [*или* $y_-(t,x,\lambda)$] *из равенства* (3.1), *т.е.* $S_+^{(2j)}(t,x,\lambda) = S_-^{(2j-1)}(t,y_+(t,x,\lambda),\lambda)$ [*или* $S_-^{(2j)}(t,x,\lambda) = S_-^{(2j-1)}(t,y_-(t,x,\lambda),\lambda)$]. *Множества* $S_+^{(2j-1)}(t,x,\lambda)$ [*или соответственно* $S_-^{(2j-1)}(t,x,\lambda)$] *строятся аналогичным образом через предыдущие.*

4. Пример

Рассмотрим задачу об управлении колебаниями материальной точки переменной массы $m(t)$, движущейся по идеально гладкой горизонтальной прямой под действием силы притяжения к некоторой неподвижной точке, расположенной на этой прямой. Будем полагать, что проекция силы притяжения на прямую равна $-m(t)(1-\lambda)^2 x_1$, где x_1 — расстояние от точки до центра притяжения, λ — малый параметр. Уравнения движения имеют вид [2]

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1-\lambda)^2 x_1 + u(t), \tag{4.1}$$

где $u(t)$ — управляющее воздействие — реактивная сила, действующая на единицу массы.

Сначала для системы (4.1) построим инвариантную часть кривой переключений в соответствии с теоремами 2.1 и 2.2. Обозначим: $k = 1 - \lambda$, тогда будем иметь

$$h_1(t, \tau, \lambda) = \frac{1}{k} \sin k(t - \tau), \quad h_1(t, \tau, \lambda) = \cos k(t - \tau).$$

Следовательно, $\bar{t}_0(\lambda) = 0, \quad \bar{t}_1(\lambda) = \pi/k$.

Параметрическое уравнение (2.2) инвариантной линии имеет вид

$$x_1 = y_1 \cos k\xi + \frac{y_2}{k} \sin k\xi \mp \frac{\mu}{k^2}(\cos k\xi - 1), \tag{4.2}$$

$$x_2 = -y_1 k \sin k\xi + y_2 \cos k\xi \mp \frac{\mu}{k} \sin k\xi, \tag{4.3}$$

$$y_1 - x_1 \cos k\xi - \frac{x_2}{k} \sin k\xi \geq 0 (\leq 0) \tag{4.4}$$

при $0 \leq \xi \leq \pi/k$. Исключив величину ξ из (4.2), (4.3), получим инвариантную часть линии переключений

$$\begin{aligned}[y_2(x_1 \mp \frac{\mu}{k^2}) - x_2(y_1 \mp \frac{\mu}{k^2})]^2 + [k(x_1 \mp \frac{\mu}{k^2})(y_1 \pm \frac{\mu}{k^2}) + x_2 y_2/k]^2 = \\ = (y_2^2/k^2 + k^2 y_1^2 \mp \mu/k^3)^2.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Неравенство (4.4) необходимо для отбора нужной части кривой (4.5).

Укажем теперь путь построения линии переключений, отвечающей задаче 1. Выберем такие исходные данные:

$$\mu = 1, \ x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = 0.$$

Из (4.5) найдём уравнение инвариантной части линии переключений, полагая $y_1 = x_1^{(1)} = 0, \quad y_2 = x_2^{(1)} = 0$:

$$x_2^2 + k^2(x_1 \mp \frac{1}{k^2})^2 = 1/k^2. \tag{4.6}$$

Из неравенства (4.4) следует, что инвариантная часть линии переключений состоит соответственно из нижней и верхней половин эллипса (4.6).

В уравнениях (4.2), (4.3) положим $\xi = \pi/k$ и найдём связь между начальными позициями $\{t, x_1, x_2\}$ и конечными $\{\pi/k, y_1, y_2\}$, в которые можно попасть без переключений за наибольшее по величине минимально возможное время:

$$y_1 = -x_1 \pm 2/k^2, \quad y_2 = x_2. \tag{4.7}$$

Получим в явном виде первый участок $S_+^{(1)}(t,x,\lambda)$ неинвариантной части линии переключений. Для этого зависимость $y_1=-x_1-2/k^2, \quad y_2=x_2$ подставим в уравнение

$$y_2^2+k^2(y_1-\frac{1}{k^2})^2=1/k^2$$

и получим, что $S_+^{(1)}(t,x,\lambda)$ является верхней половиной эллипса:

$$x_2^2+k^2(x_1+\frac{3}{k^2})^2=1/k^2.$$

Аналогичным образом легко могут быть получены и все остальные неинвариантные части линии переключений.

Минимально возможное время движения из произвольной точки $\{t,x_1,x_2\}$ на инвариантной кривой является наименьшим положительным корнем уравнения

$$|y_1-x_1\cos k\xi-\frac{x_2}{k}\sin k\xi|=\frac{1}{k^2}(1-\cos k\xi).$$

Минимально возможное время движения из произвольной точки $\{t,x_1,x_2\}$, не лежащей на инвариантной кривой, следует вычислять по методике, изложенной в [5].

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.

2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.

4. Альбрехт Э.Г., Ермоленко Е.А. Приближенное вычисление оптимальных процессов в квазилинейных системах // Техн. кибернетика. 1994. №3. С.5–12.

5. Альбрехт Э.Г., Ермоленко Е.А. Синтез оптимального по быстродействию управления в линейных системах // Дифференц. уравнения. 1997. №11. С.1141–1148.

Статья поступила 05.11.1997 г.